АКАДЕМИЯ НАУК СССР
НАУЧНЫЙ ЦЕНТР БИОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

ПРЕПРИНТ

С.А. АЗИЗОВ, З.А. ИСКЕНДЕР-ЗАДЕ, А.М. МОЛЧАНОВ

ОБЩИЙ МЕТОД РАСЩЕПЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МНОГОСТАДИЙНЫХ АППАРАТОВ РАЗДЕЛЕНИЯ

ПУЩИНО
1974

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
НАУЧНЫЙ ЦЕНТР БИОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

ПРЕПРИНТ

С.А. АЗИЗОВ, З.А. ИСКЕНДЕР-ЗАДЕ, А.М. МОЛЧАНОВ

ОБЩИЙ МЕТОД РАСЩЕПЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МНОГОСТАДИЙНЫХ АППАРАТОВ РАЗДЕЛЕНИЯ

ПУЩИНО
1974

УДК 621.391.66.048

Рассматриваются вопросы приближенного моделирования многостадийных аппаратов разделения. На основании обобщения теоремы Хинчина о сумматорных функциях для цепочечных систем предлагается общий метод расщепления потарелочных моделей таких аппаратов. При помощи предложенного метода получена приближенная модель верхней части колонны.

Полученные результаты носят общий характер и поэтому могут быть применены к моделям тарельчатых ректификационных и абсорбционных аппаратов.

Аппараты четкого разделения являются основными узлами нефтеперерабатывающей и нефтехимической промышленности. Характерной особенностью таких аппаратов является их многостадийность, т.е. для обеспечения заданного разделения в них используют большое число стадий разделения.

Высокое требование к четкости разделения требует всестороннего изучения динамических характеристик, которые очень важны как при пуске этих аппаратов, так и для создания более совершенных систем управления и их эксплуатации. С этой целью обычно составляются математические модели исследуемых аппаратов.

Для математического моделирования таких аппаратов имеется ряд подходов, один из которых заключается в том, что моделируется каждый элемент разделения. Такой подход довольно часто применяется при моделировании тарельчатых ректификационных и абсорбционных аппаратов. Однако при таком лобовом моделировании возникает ряд трудностей. Главная трудность заключается в том, что такие модели для многостадийных аппаратов имеют довольно высокий порядок. Теоретическое исследование таких моделей находится далеко за пределами современных математических методов. С другой стороны, замена теоретического анализа численным анализом затруднена тем, что даже мощные современные электронные машины не позволяют исследовать систему при наиболее точном моделировании.

В данной работе на основании теоремы Хинчина о сумматорных функциях /1,2/ сделана попытка создать общий метод расщепления потарелочной модели многостадийных аппаратов разделения.

Изложим суть предлагаемого метода. Поскольку многостадийные аппараты состоят из одинаковых тарелок, их потарелочная модель имеет следующий общий вид:

$$\frac{dz_i}{d\tau} = a(z_{i-1}, z_i, z_{i+1}) \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где z - вектор переменных состояний тарелок, n - число тарелок.

Для колонны вводим сумматорную функцию H :

$$H = \sum_{i=1}^{n} h(z_i). \tag{2}$$

Для выбранной функции H должно удовлетворяться следующее условие:

$$\int_{z} e^{-\beta h(z)} dz < +\infty . \tag{3}$$

Пока в пределах условия (3) выбор функции H будем считать произвольным. Найдем поведение этой функции в силу исходной системы (1):

$$\frac{dH}{d\tau} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h(z_i)}{\partial z_i} \cdot \frac{dz_i}{d\tau} = \frac{\partial h(z_1)}{\partial z_1} a(z_0, z_1, z_2) + \\ + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{\partial h(z_i)}{\partial z_i} a(z_{i-1}, z_i, z_{i+1}) + \frac{\partial h(z_n)}{\partial z_n} a(z_{n-1}, z_n, z_{n+1}). \tag{4}$$

Правая часть уравнения (4) является функцией n переменных, и с применением обобщения теоремы Хинчина на случай цепочечных систем она может быть аппроксимирована через одно переменное H. Тогда согласно (П-6-8) можем написать:

$$\frac{dE}{d\tau} = \frac{1}{\varphi^2(\beta)} \int_{z_1}\int_{z_2} \frac{\partial h(z_1)}{\partial z_1} a(z_0, z_1, z_2) e^{-\beta[h(z_1)+h(z_2)]} dz_1 dz_2 +$$

$$+ \frac{n-2}{\varphi^3(\beta)} \int_{z_{i-1}}\int_{z_i}\int_{z_{i+1}} \frac{\partial h(z_i)}{\partial z_i} a(z_{i-1}, z_i, z_{i+1}) e^{-\beta[h(z_{i-1})+h(z_i)+h(z_{i+1})]} dz_{i-1} dz_i dz_{i+1} +$$

$$+ \frac{1}{\varphi^2(\beta)} \int_{z_{n-1}}\int_{z_n} \frac{\partial h(z_n)}{\partial z_n} a(z_{n-1}, z_n, z_{n+1}) e^{-\beta[h(z_{n-1})+h(z_n)]} dz_{n-1} dz_n =$$

$$= B(z_0, z_{n+1}, \beta). \tag{5}$$

$$E = -n \frac{d \ln \varphi(\beta)}{d\beta}. \tag{6}$$

$$\varphi(\beta) = \int_z e^{-\beta h(z)} dz, \tag{7}$$

где E – значение функции H.

Если исключить β из уравнений (5) и (6), получим дифференциальное уравнение следующего вида:

$$\frac{dE}{d\tau} = f(E, z_0, z_{n+1}). \tag{8}$$

Для любой большой системы, отвечающей условиям теоремы Хинчина, могут быть получены уравнения типа (8), которые дают возможность провести качественное исследование системы. В работе /3/ при помощи теоремы Хинчина построена асимптотическая модель коллектива спиновых колебаний.

В случае, когда уравнение (6) не решается относительно β, удобно иметь одно дифференциальное уравнение относительно β вместо системы (5-6). Дифференцируя обе части (6) по времени и учитывая $\frac{dH}{d\tau}$ из (5), получим уравнение, имеющее следующую структуру:

$$\frac{d\beta}{d\tau} = \frac{1}{n}\, b(z_0, z_{n+1}, \beta) + c(\beta). \tag{9}$$

Для решения уравнения (9) должны быть заданы граничные условия z_0 и z_{n+1}. Ясно, что для больших колонн они слабо влияют на поведение β или E.

Уравнение (11), позволяющее определить поведение функции E, является основным уравнением, использующимся для расщепления исходной модели (1). Для этого рассмотрим формальную колонну, которая устроена следующим образом: в верхней части имеется группа (τ) тарелок, состоящая из взаимодействующих тарелок, причем первая тарелка этой группы с нижней стороны осреднена на поверхности функции H. Остальные тарелки, не входящие в эту группу, расщеплены друг от друга и являются тоже осредненными на поверхности функции H как с нижней, так и с верхней стороны Первая тарелка колонны является осредненной только с верхней стороны, так как с нижней стороны связана с входным потоком.

Математическая модель такой формальной колонны имеет следующий вид:

группа (τ) тарелок

$$\frac{dv_i}{d\tau} = a(v_{i-1}, v_i, v_{i+1}), \qquad i = n-\tau+2, \dots, n; \tag{10}$$

$$\frac{dv_{n-\tau+1}}{d\tau} = \frac{1}{\varphi(\beta)} \int\limits_{V_{n-\tau}} a(v_{n-\tau}, v_{n-\tau+1}, v_{n-\tau+2}) e^{-\beta h(v_{n-\tau})} dv_{n-\tau}; \tag{11}$$

осредненные тарелки

$$\frac{dv_j}{d\tau} = \frac{1}{\varphi^2(\beta)} \int\limits_{V_{j-1}} \int\limits_{V_{j+1}} a(v_{j-1}, v_j, v_{j+1}) e^{-\beta[h(v_{j-1}) + h(v_{j+1})]} dv_{j-1}\, dv_{j+1}, \qquad j = 2, \dots, n-\tau; \tag{12}$$

первая тарелка колонны

$$\frac{dv_1}{d\tau} = \frac{1}{\varphi(\beta)} \int\limits_{V_2} a(v_0, v_1, v_2) e^{-\beta h(v_2)}\, dv_2, \tag{13}$$

где v – вектор переменных состояния тарелок формальной колонны.

Рассмотрим поведение аналогичной функции

$$H^* = \sum_{i=1}^{n} h(v_i) \tag{14}$$

для описанной формальной колонны.

Определим поведение этой функции в силу системы (10–13):

$$\frac{dH^*}{d\tau}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial h(v_i)}{\partial v_i}\cdot\frac{dv_i}{d\tau}=\frac{\partial h(v_1)}{\partial v_1}\cdot\frac{1}{\varphi(\beta)}\int\limits_{v_2}a(v_0,v_1,v_2)e^{-\beta h(v_2)}dv_2+$$

$$+\sum_{j=2}^{n-r}\frac{\partial h(v_j)}{\partial v_j}\cdot\frac{1}{\varphi^2(\beta)}\int\limits_{v_{j-1}}\int\limits_{v_{j+1}}a(v_{j-1},v_j,v_{j+1})e^{-\beta[h(v_{j-1})+h(v_{j+1})]}dv_{j-1}dv_{j+1}+$$

$$+\frac{\partial h(v_{n-r+1})}{\partial v_{n-r+1}}\cdot\frac{1}{\varphi(\beta)}\int\limits_{v_{n-r}}a(v_{n-r},v_{n-r+1},v_{n-r+2})e^{-\beta h(v_{n-r})}dv_{n-r}+$$

$$+\sum_{i=n-r+2}^{n-1}\frac{\partial h(v_i)}{\partial v_i}a(v_{i-1},v_i,v_{i+1})+\frac{\partial h(v_n)}{\partial v_n}a(v_{n-1},v_n,v_{n+1}). \tag{15}$$

Применяя к правой части этого уравнения обобщение теоремы Хинчина на случай цепочечных систем, получим:

$$\frac{dE^*}{d\tau}=\frac{1}{\varphi^2(\beta)}\int\limits_{v_1}\int\limits_{v_2}\frac{\partial h(v_1)}{\partial v_1}a(v_0,v_1,v_2)e^{-\beta[h(v_1)+h(v_2)]}dv_1dv_2+$$

$$+\frac{n-2}{\varphi^3(\beta)}\int\limits_{v_{i-1}}\int\limits_{v_i}\int\limits_{v_n}\frac{\partial h(v_i)}{\partial v_i}a(v_{i-1},v_i,v_{i+1})e^{-\beta[h(v_{i-1})+h(v_i)+h(v_{i+1})]}dv_{i-1}dv_i\,dv_{i+1}+$$

$$+\frac{1}{\varphi^2(\beta)}\int\limits_{v_{n-1}}\int\limits_{v_n}\frac{\partial h(v_n)}{\partial v_n}a(v_{n-1},v_n,v_{n+1})e^{-\beta[h(v_{n-1})+h(v_n)]}dv_{n-1}dv_n=$$

$$=B^*(v_0,v_{n+1},\beta). \tag{16}$$

$$E^*=-n\frac{d\ln\varphi(\beta)}{d\beta}. \tag{17}$$

$$\varphi(\beta) = \int_{v} e^{-\beta h(v)}\, dv. \tag{18}$$

Сравнение (16) с (5)$_*$ показывает, что при одинаковых граничных условиях $z_0 = v_0$ и $z_{n+1} = v_{n+1}$ поведение E^* для формальной и E для исходной систем является совершенно одинаковым. Отсюда вытекает очень важный вывод, что исходная модель должна расщепляться так, чтобы обеспечивались следующие условия:

$$v_0(\tau) = z_0(\tau), \tag{19}$$

$$v_{n+1}(\tau) = z_{n+1}(\tau). \tag{20}$$

Тогда можно сказать, что поведение исходной и расщепленной систем эквивалентно в смысле поведения глобального переменного E.

Таким образом, поведение E является критерием расщепления исходной модели. Кроме того, функция E в пространстве переменных выделяет некоторую поверхность, на которой осуществляется осреднение переменных тарелок.

Заметим, что число тарелок (τ) в системе (10–11), являющееся свободным параметром, можно использовать для удовлетворения условий (19), (20).

Применение развиваемого метода, а также методика определения числа тарелок (τ) для конкретного случая будут рассмотрены в последующих работах.

Расщепление исходной модели исчерпывающей секции может быть осуществлено аналогично. При этом тарелка питания и куб должны рассматриваться как верхние и нижние граничные элементы разделения.

В заключение отметим, что на основании теоремы Хинчина о сумматорных функциях разработан метод для расщепления исходной модели многостадийных аппаратов разделения. Полученные системы описывают отдельные участки колонны и имеют относительно меньший порядок, что является преимуществом таких систем.

Приложение.

Обобщение теоремы Хинчина о сумматорных функциях на случай цепочечных систем

Теорема Хинчина о сумматорных функциях изложена в работе /1/. Здесь приводится ее обобщение для цепочечных систем.

Пусть нам задана функция для цепочечной системы

$$\mathcal{A}(X) = \sum_{i=1}^{n} a(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \tag{П-1}$$

и сумматорная функция

$$H(X) = \sum_{i=1}^{n} h(x_i). \tag{П-2}$$

Согласно теореме Хинчина функция $\mathcal{A}(X)$ представлена в виде суммы двух функций:

$$\mathcal{A}(X) = B(H) + \mathcal{F}(X). \tag{П-3}$$

Первое слагаемое $B(H)$ называется доминантой и зависит от одного переменного H, имеет величину порядка n и сохраняет постоянное значение на каждой поверхности уровня функции (П-2). Второе слагаемое $\mathcal{F}(X)$ называется флуктуантой, зависит от всех переменных $\{x_1, \ldots, x_n\}$ и может меняться вдоль этой поверхности, но относительно мало на ней в том смысле, что

$$\frac{\int\limits_{H(X)=E} \mathcal{F}^2(X)\,d\sigma}{\int\limits_{H(X)=E} B^2(H)\,d\sigma} \sim \frac{1}{n}. \tag{П-4}$$

Поэтому для больших n флуктуанта может быть отброшена:

$$\mathcal{A}(X) \approx B(H). \tag{П-5}$$

Доминанта $B(H)$ вычисляется по следующим формулам:

$$B(\beta) = \frac{1}{\varphi^2(\beta)} \int\limits_{x_1} \int\limits_{x_2} a(x_0, x_1, x_2) e^{-\beta[h(x_1)+h(x_2)]} dx_1\, dx_2 +$$

$$+ \frac{n-2}{\varphi^3(\beta)} \int\limits_{x_{i-1}} \int\limits_{x_i} \int\limits_{x_{i+1}} a(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) e^{-\beta[h(x_{i-1})+h(x_i)+h(x_{i+1})]} dx_{i-1}\, dx_i\, dx_{i+1} +$$

$$+ \frac{1}{\varphi^2(\beta)} \int\limits_{x_{n-1}} \int\limits_{x_n} a(x_{n-1}, x_n, x_{n+1}) e^{-\beta[h(x_{n-1})+h(x_n)]} dx_{n-1}\, dx_n. \tag{П-6}$$

$$H(\beta) = -n \frac{d \ln \varphi(\beta)}{d\beta}. \tag{П-7}$$

$$\varphi(\beta) = \int\limits_{x} e^{-\beta h(x)}\, dx. \tag{П-8}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Молчанов А.М. Об одной теореме А.Я.Хинчина (препринт). ИПМ АН СССР, М., 1968.
2. Молчанов А.М. Теорема выравнивания и формула Больцмана. Закон возрастания энтропии (препринт). ИПМ АН СССР, М., 1968.
3. Китаев Л.В., Молчанов А.М. К теории нелинейного взаимодействия спиновых волн (препринт). ИПМ АН СССР, М., 1970.

С.А.Азизов, З.А.Искендер-заде, А.М.Молчанов

ОБЩИЙ МЕТОД РАСЩЕПЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ
МНОГОСТАДИЙНЫХ АППАРАТОВ РАЗДЕЛЕНИЯ

Отредактировано и подготовлено к печати
в Отделе научно-технической информации

Редактор Е.С.Бражникова

Т-18762. Подписано в печать 12/XI-1974 г. Уч.-изд. л. 0.8
Тираж 150 экз. Заказ 2160Р.

Отпечатано на ротапринте в ОНТИ Научного центра биологических исследований АН СССР в Пущине.